Endomorphismes échangeurs (indications)

1)

2) **a)**

b) Toute égalité $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ où $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ peut être réécrite en termes de noyau et d'image. Ensuite, raisonner sur les dimensions.

c)

1 Réduction au cas nilpotent

3) Introduire des décompositions du type $F+G$ de A et B et les recoller soigneusement pour créer une décomposition de E.

4) **a)**

b) Par l'absurde. Raisonner sur les dimensions et profiter du fait que $\dim \operatorname{Ker} u > 0$ si u n'est pas injectif.

c) Pour les noyaux, récurrence !

d)

e) Pourquoi $u|_{\operatorname{Ker} u^p}$ (resp. $u|_{\operatorname{Im} u^p}$) est-il bien un endomorphisme de $\operatorname{Ker} u^p$ (resp. $\operatorname{Im} u^p$) ?

5) **a)**

b) Il se trouve que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{2p}$ et $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{2p}$.

c) Utiliser le résultat de la question **2)**.

d)

2 Cas nilpotent

6) **a)**

b)

c)

7) **a)**

b) Si $p = n$, séparer les pairs des impairs.

8) **a)**

b)

9)

10) **a)**

b)

11) Raisonner par récurrence sur n.